Výsledky testů

Kapitola 1

A. 1.a) ne, b) ano, c) ano, d) ne, e) ne, f) ano, g) ano, h) ano.

B. 2. a) $D(f)=(-\infty,2\rangle\cup\langle 3,\infty)$, b) $D(g)=(2,\infty)$, c) $D(h)=\mathbf{R}$.

3. a) sudá, b) není ani sudá ani lichá, c) lichá.

4. a) není prostá, b) je prostá, c) není prostá.

5. a) $f^{-1}: y=-\sqrt{x+1}$, $D(f^{-1})=\langle -1,\infty)$, b) $f^{-1}: y=\dfrac{2-x}{x+1}$, $D(f^{-1})=\mathbf{R}/\{-1\}$.

6. a) $h: y=\sqrt{x^2-9}$, $D(h)=(-\infty,-3\rangle\cup\langle 3,\infty)$, b) $h: y=-x+2\sqrt{x}-1$, $D(h)=\langle 0,\infty)$.

Kapitola 2

A: 1. ano, 2. ano, 3. ano, 4. ano, 5. ne, 6. ano, 7. ne, 8. ne, 9. ano

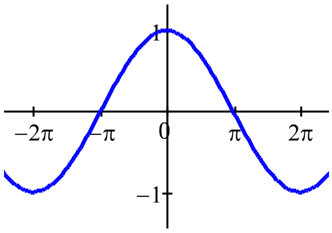
B: 1.a) $(1,2)\cup(2,\infty)$, b) $\mathbf{R}$, c) $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, d) $\left\langle\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right\rangle$, e) $(-\infty,-\sqrt{10})\cup\langle 5,\infty)$, f) $\mathbf{R}/\{3\}$.

2. a) je prostá pro $x\in(2,\infty)$, b)není prostá v $\mathbf{R}$, c)je prostá pro $x\in\langle -2,-1\rangle$.

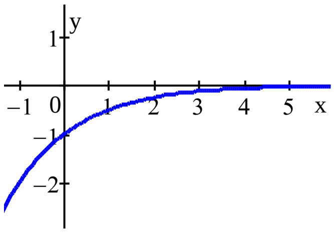
3. a) $f^{-1}: y=2^{x-1}+2$, $D(f^{-1})=\mathbf{R}$, b) neexistuje inverzní funkce,

c) $h^{-1}: y=\dfrac{\cos x-3}{2}$, $D(h^{-1})=\langle 0,\pi\rangle$.

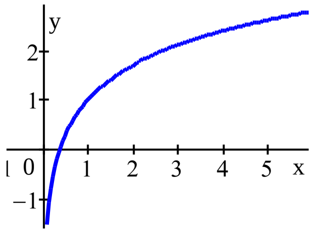
4. a)



b)

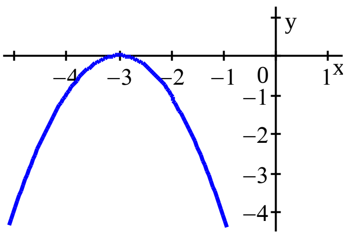


c)

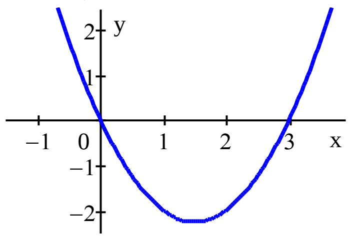


5. a) $x=2\sqrt{2}$, b) $x=6$. 6. $D(f)=(-1,1)$, je lichá. 7. $y=21\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

8. a) $H(f)=(-\infty,0\rangle$



b) $H(g)=\langle -2,\infty)$



Kapitola 3

A. 1.a) ne, b) ano, c) ne, d) ne, e) ano.

2.a) $R(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, b) $R(x)=\dfrac{x-1}{x^4+1}$, c) $R(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}$.

3. a) $P(x)=2x^4-3x^2+1$, b) $P(x)=x^3-3x$.

B. 1.a) $P(x)+Q(x)=x^5+3x^4+x^3-6x+5$, b) $P(x)-Q(x)=x^5+3x^4-x^3-8x+3$,

c) $P(x).Q(x)=x^8+3x^7+x^6+4x^5-4x^4+4x^3-7x^2-3x+4$,

d) $P(x):Q(x)=x^2+3x-1-\dfrac{4x^2+9x-5}{x^3+x+1}$.

2. $P(3) = -6$, číslo 2 je dvojnásobným kořenem

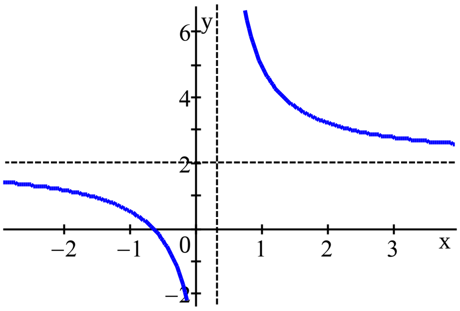
3. a) $P(x) = x.(x-1).(x+2)^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ (dvojnásobný),

b) $Q(x) = (x+1).(x-2).(x-3)^3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ (trojnásobný),

c) $S(x) = (x+2).(x-3).(x+7).(x^2-x+1)$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -7$.

4.a) $f(x) = x^2 - 5x - 5 - \dfrac{5}{x-1}$, $D(f) = \mathbf{R}/\{1\}$, b) $g(x) = 2x^2 + 6 + \dfrac{3x+19}{x^2-3}$, $D(g) = \mathbf{R}/\{\pm\sqrt{3}\}$.

5. a) b) $D(f) = \mathbf{R}/\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$, $H(f) = \mathbf{R}/\{2\}$



c) Funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 1/3)$ a $(1/3, \infty)$, a je tedy na těchto intervalech monotónní, ale není monotónní v $D(f)$. Funkce není ohraničená, není sudá ani lichá a není periodická.

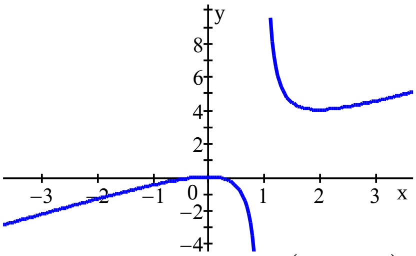
6. a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2x+1}$, b) $g(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, c) $h(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3-2x}{x^2-2x+2}$.

Kapitola 4

A. 1. a) ne, b) ano, c) ne, d) ano, e) ano, f) ne .

B. 1. a) $\pi - 1$, b) 4, c) 0, d) $\dfrac{1}{2}$, e) 2, f) $+\infty$, g) neexistuje, h) $+\infty$.

2. Např. funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$



3. a) body nespojitosti : -1, 0, 1, intervaly spojitosti : $(-\infty, -1), (-1, 0), \quad (0, 1), (1, +\infty)$,

b) body nespojitosti : $(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; intervaly, kde je funkce spojitá :

$\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}} \left((2k-1).\dfrac{\pi}{2}, (2k+1).\dfrac{\pi}{2} \right)$, $k \in \mathbf{Z}$,

c) Funkce nemá body nespojitosti. Je spojitá na intervalu $\left(-\infty, \dfrac{7}{5} \right\rangle$. V bodě $\dfrac{7}{5}$ je spojitá zleva.

d) Funkce je spojitá v **R**.

Kapitola 5

A: 1. d) , 2. a) pravdivé, b) nepravdivé, c) nepravdivé. 3. b)

4. viz Přehled vzorců pro derivování základních elementárních funkcí, 5. c) ,

6. Funkce má v bodě x_0 oboustrannou derivaci $f'(x_0)$, pokud v bodě x_0 existují jednostranné derivace $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a mají stejnou hodnotu, tedy $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Pokud mají jednostranné derivace různou hodnotu, nebo pokud některá z nich neexistuje, neexistuje zde ani oboustranná derivace $f'(x_0)$.

7. a).

B: 1. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-(x+h)^2-(1-x^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-x^2-2xh-h^2-1+x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2xh-h^2}{h} =$
$= \lim\limits_{h\to 0}(-2x-h) = -2x$.

2. a) $y+1=3(x-1)$, b) $y+1=-(x+1)$, c) $y-\dfrac{15}{4}=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, d) $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. a) $y-1=-\dfrac{1}{3}(x-1)$, b) $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, c) $y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$, d) $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. a) $f'_+(3)=1$, $f'_-(3)=-1$, $f'(3)$ neexistuje, b) $f'_+(0)=4$ $f'(0)$, $f'_-(0)=0$, $f'(0)$ neexistuje. c) $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=1$, $f'(0)=1$.

5. a) $-2\dfrac{x^2+x+1}{(1+2x)^2}$, b) $\ln x$, c) $10^x(1+x\ln 10)$, d) $4\sin 2x$, e) $-\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$, f) $\dfrac{-1}{x^2+1}$, g) $\dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}$.

6. a) $y''=\dfrac{6x.(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}$, b) $y'''=\dfrac{1}{x^4}\cdot\cos\dfrac{1}{x}$. 7. a) $-\dfrac{x}{y}$, b) $\dfrac{-y(x+1)}{x}$.

Kapitola 6

A. 1. a) pravdivé, b) nepravdivé, c) nepravdivé, d) pravdivé. 2.c)

3. stacionárním bodem funkce nazýváme bod x_0, pro který platí $f'(x_0)=0$, může (ale nemusí) v něm nastat lokální extrém. 4. ano 5. b) i c).

B. 1. a) -2, b) 0, c) $-\dfrac{1}{2}$, d) 1.

2. a) rostoucí v **R**, b) rostoucí v int. $(-1,1)$, klesající v int. $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$, c) rostoucí v int. $(-\infty,-3\rangle, (-1,0), (0,\infty)$, klesající v int. $\langle -3,-1)$, d) rostoucí v int. $(-\infty,2\rangle, \langle 0,\infty)$, klesající v int. $\langle 2,0\rangle$.

3. a) v bodě $x=-\dfrac{\pi}{4}$ je lok.min., v bodě $x=\dfrac{\pi}{4}$ je lok.max., b) v bodě $x=-1$ je lok.max., v bodě $x=1$ je lok.min., c) v bodě $x=0$ je lok.max., d) v bodě $x=1$ je lok.min.

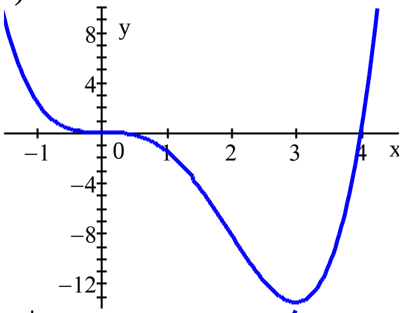
4. a) konvexní v $(-\infty,0)$, $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, konkávní v $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, IB v $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, b) konvexní v $(-\infty,-1)$, konkávní v $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, IB nemá, c) konkávní v $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$, konvexní v $(-1,+\infty)$, IB v bodě $x=-\dfrac{3}{2}$.

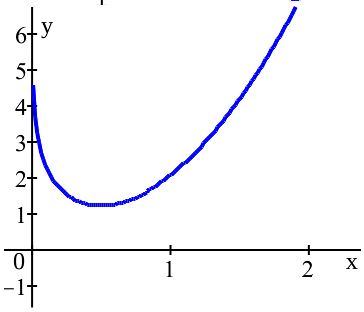
5. a) $D(f)=\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $P_x=P_y=[0,0]$, $P_x=[4,0]$, lok. min.v $x=3$, IB v $x=0$ a v $x=2$, asymptoty nemá.

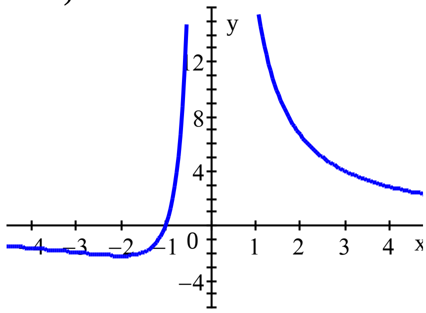
b) $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, není sudá ani lichá, $P_x=[-1,0]$, lok.min. v bodě $x=-2$, IB v $x=-3$, konkávní v $(-\infty,-3)$, konvexní v $(-3,0)$, $(0,+\infty)$, asymptoty $x=\pm 1$, $y=0$.

c) $D(f)=(0,+\infty)$, není sudá ani lichá, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, průsečíky se souřadnicovými osami nemá, lok.min. v bodě $x=\dfrac{1}{2}$, funkce je konkávní v celém $D(f)$, asymptota $x=0$.

a) b) c)







Kapitola 7

A. 1. a) ano, b) ne, jsou posunuté ve směru osy y, c) ne, neurčitý integrál součtu dvou funkcí je roven součtu neurčitých integrálů těchto funkcí, d) ano.

2. a) $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$, b) $\int \cos x\,dx=\sin x+c$,

c) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\mathrm{cotg}\,x+c$, d) $\int e^x dx=e^x+c$,

e) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$, f) $\int \dfrac{1}{A^2+x^2}dx=\dfrac{1}{A}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{A}+c$,

g) $\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+c$.

3. Substituce typu $t=\varphi(x)$: $\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$, metoda per partes :

$$\int u(x).v'(x)dx=u(x).v(x)-\int u'(x).v(x)dx.$$

4. integrovaná funkce = integrand

B. 1. a) $\dfrac{x^5}{5}-x^4+\dfrac{5x^3}{3}-2x^2+4x+c$, b) $\dfrac{6}{13}x^2.\sqrt[6]{x}+20\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x}+c$,

c) $\dfrac{3.2^x}{\ln 2}+5\cos x+x+c$, d) $4\ln|x|-\dfrac{3a}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+c$, e) $-\mathrm{cotg}x-x+c$, f) $\mathrm{arctg}\,3x+c$,

g) $\dfrac{5}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{x+1}{2}+c$, h) $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+11}\right|+c$, i) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x}{4}+c$, j) $\dfrac{2}{3}\ln|\sin 3x|+c$, 2.a) $x^2+\ln\left|x^3-2x\right|+c$, b) $x-4\operatorname{arctg}x+c$, c) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+c$,

d) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+c$.

3. a) $\frac{4}{9}\left(x^3+2\right)^6+c$, b) $-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}+c$, c) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$, d) $\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+2\sqrt{x}+c$,

e) $2\sqrt{x-1}-4\sqrt[4]{x-1}+4\ln\left|\sqrt[4]{x-1}+1\right|+c$,

f) $\sin x-2\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+c$, g) $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+c$.

4. a) $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+c$, b) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+c$, c) $(3x+2)\sin x+3\cos x+c$,

d) $\frac{2^x(\ln 2.\sin x-\cos x)}{1+\ln^2 2}+c$.

Kapitola 8

A. 1. c). 2. a) pravdivé, b) nepravdivé, c) nepravdivé, d) pravdivé. 3. b).
4. Příslušná funkce není spojitá v bodě a) $x=0$, b) $x=3$, c) $x=-3$.

B. 1. a) 18, b) $4\ln 4-\frac{15}{2}$, c) $\frac{e^9-1}{3e^6}$. 2. a) $\frac{7}{24}$, b) $\frac{16}{3}$,c) 2.

3. a) $\frac{3e^4+1}{16}$, b) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-2$, c) $\frac{1}{2}\left(e^\pi+1\right)$. 4. a) $-\frac{1}{2}$, b) diverguje, c) 0.

5. a) $\frac{1}{2}\ln 2$, b) $\frac{32}{9}$, 6. a) $\frac{\pi^2}{4}$, b) $\frac{\pi}{20}$. 7. a) $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}\cong 1{,}44$, b) $-0{,}3-\ln\frac{11}{21}\cong 0{,}347$.

Kapitola 9

A. 1. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano, e) ne, f) ano, g) ano.
2. Souvisí, je-li $\det\mathbf{A}\neq 0$, pak je matice **A** regulární.
3. regulární , čtvercová.
4. Výměna dvou po sobě jdoucích řádků způsobí změnu znaménka determinantu.

B. 1.a) $(0, 6, 5)$, b) -10. 2. a) nezávislé, b) závislé. 3. $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -6 & 9\end{pmatrix}$.

4. a) $h(\mathbf{A})=2$, b) $h(\mathbf{B})=4$. 5. $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 6. a) 0, b) 90.

7. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ -7 & -19\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & -8 & 4\\ 1 & -11 & -12\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

8. a) $(1, -1, 2, 1)$, b) nemá řešení, **c)** $(-2, 2-t, -3, t)$, $t\in\mathbf{R}$.

Kapitola 10

A. 1.a) ne, b) ano, c) ne, d) ne, e) ano, f) ne, g) ne, h) ne. 2.a, 3.b, 4.b.

B. 1.a) $\{-1, -2, 2, 2\}$, b) $\{2, 2, 5, \pm i\sqrt{3}\}$.

2. a) $x_1 = -2$, ostatní jsou komplexní, b) $x_1 = -1, x_2 = 1$, ostatní komplexní.

3. a) $x \doteq 1{,}1562$, b) $x_1 \doteq -2{,}66907$; $x_2 \doteq 0{,}52397$; $x_3 \doteq 2{,}14510$, c) $x \doteq 2{,}93114$.

4. a) $T_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, ($T_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$),

b) $T_4(x) = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 - 4x^4$,

($T_4(x) = \ln 3 - \frac{2}{3}(x+1) - \frac{2}{9}(x+1)^2 - \frac{8}{81}(x+1)^3 - \frac{4}{81}(x+1)^4$),

c) $T_3(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{5}{16} \cdot x^3$.

5. a) $T_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$,

b) $T_n(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n+1}{n!} \cdot x^n$, c) $T_n(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots + \frac{x^n}{2^n}$.

6. Stačí volit $n = 6$: $\cos 84^\circ = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{60^2} + \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi^4}{60^4} - \frac{1}{720} \cdot \frac{\pi^6}{60^6} = 0{,}104528$.

7. a) $L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{7}{3}$, b) $L_3(x) = -\frac{1}{30}x^3 + \frac{2}{15}x^2 - \frac{11}{10}x + 1$,

8. $|R_3(x)| \leq 2{,}344.10^{-9}$.

9. a) $y = 1{,}7x - 0{,}86$, b) $y = -0{,}2x + 2{,}8$.

10. a) $y = 1{,}08203 \cdot 1{,}65465^x$, b) $y = 2{,}917 \cdot 7{,}29^x - 2$.